

Title	浮動小数ジョルダン標準形の安定化(数式処理における理論と応用の研究)
Author(s)	新妻, 弘崇; 白柳, 潔
Citation	数理解析研究所講究録 (1997), 986: 195-205
Issue Date	1997-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/60993
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

浮動小数ジョルダン標準形の安定化

奈良先端科学技術大学院大学 新妻 弘崇 (Hirotaka Niitsuma)
NTT コミュニケーション科学研究所 白柳 潔 (Kiyoshi Shirayanagi)

1. はじめに

数式処理のアルゴリズムでは、多くの場合、入力を単純に近似しただけでは、必ずしも得られた出力が正確な出力の近似になるわけではない。これをアルゴリズムの不安定性という。白柳-Sweedler の安定化手法 [3] は、不安定なアルゴリズムを安定なアルゴリズムに変換し、その安定化されたアルゴリズムを使えば、近似計算によって、元のアルゴリズムの真の出力にいくらでも近づくことができる。

ジョルダン標準形を計算するアルゴリズムも、不安定なアルゴリズムの 1 つである。ジョルダン標準形は工学的にも多くの応用と結び付いており、その安定な近似アルゴリズムの実現とその実用性の検討は非常に重要である。

本稿では、ジョルダン標準形の計算法として、単因子による方法-スミス標準形を経由する方法- をとり上げ、その不安定性について考察し、本安定化手法を適用した計算機実験について報告する。

2. 安定化理論

この節では不連続点 0 の代数的アルゴリズムを対象に、安定化手法の理論 [3] について説明する。

定義 1 不連続点 0 の代数的アルゴリズムとは、以下の条件を満足するものである。

- 入力、中間、出力データは、すべて多項式環 $C[x_1, \dots, x_n]$ の元からなる。ここで C は複素数体を表す。
- データ間の演算は C 上の加減乗除のみ。
- データ上の述語は不連続点をもたないか、もつとすれば 0 のみである。

ここに、述語の不連続点とは、If $X = 0$ then ... における 0 のように、述語の判定によって実行の道程が分岐する点のことである。多くの数式処理アルゴリズムは、不連続点 0 の代数的アルゴリズムであるか、またはそれに還元することができる。後述するように、ジョルダン標準形を計算するアルゴリズムも、不連続点 0 の述語をもつので、この範疇に入る。

不連続点 0 の代数的アルゴリズム A を安定化するポイントは、アルゴリズムの構造を変えずに、係数領域を区間係数の領域に変え、区間に対しては Zero Rewriting を行なう、というものである。アルゴリズムの不安定性は、近似を入れると述語を正確に判定できない

ために起こる。Zero Rewriting は、その述語を正確に行なうためのメカニズムである。 \mathcal{A} を安定化したアルゴリズムを $BC(\mathcal{A})$ と書こう。 $BC(\mathcal{A})$ は、次のようになる。

区間係数領域 係数領域の元は、区間 $[A, \epsilon]$ である。ここに、 $A \in \mathbf{C}$ 、 ϵ は正の実数である。

区間 $[A, \epsilon]$ は集合 $\{x \in \mathbf{C} \mid |x - A| \leq \epsilon\}$ を表す。

区間演算 区間係数の間の加減乗除は、区間演算 [1] に従う。区間演算は次のように定められる。

二項演算子 $*$ $\in \{+, -, \times, /\}$ に対し

$$[A, \alpha] * [B, \beta] = [A * B, \gamma]$$

$$(|x - A| \leq \alpha, |y - B| \leq \beta \Rightarrow |x * y - A * B| \leq \gamma)$$

Zero Rewriting アルゴリズムの実行中、途中の各区間係数 $[C, \gamma]$ が

$|C| \leq \gamma$ となるならば $[C, \gamma]$ を $[0, 0]$ に書き換える。

ここに、 $[0, 0] \cdot x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = 0$ for $\forall i_1, \dots, i_n$.

$BC(\mathcal{A})$ は、区間係数の多項式 (の集合) を入力とし、区間係数の多項式 (の集合) を出力する。

表記 1 \mathbf{C} 係数多項式 (の集合) I を入力として \mathcal{A} を実行した出力を $\mathcal{A}(I)$ 、区間係数多項式 (の集合) J を入力として $BC(\mathcal{A})$ を実行した出力を $BC(\mathcal{A})(J)$ とかく。 $BC(\mathcal{A})(J)$ は、区間係数多項式 (の集合) であるが、各区間係数の左の部分だけを抽出して得られた (すなわち \mathbf{C} 係数に戻した) 多項式 (の集合) を、 $BC(\mathcal{A})(J)_C$ と書く。

次の安定化定理は、本安定化手法に理論的な基盤を与えるものである。

定理 1 (安定化定理) 次の前提が成り立つとする。

- \mathcal{A} は不連続点 0 の代数的アルゴリズムである。
- \mathcal{A} は入力 $I \subset \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ に対し正常終了する。
- 区間列 $[I_k, \epsilon_k]$ があり

$$[I_k, \epsilon_k] \rightarrow I$$

$$(|I_k - I| \leq \epsilon_k, \epsilon_k \rightarrow 0)$$

を満足する。

以上の前提が成り立つとき、

$$BC(\mathcal{A})([I_k, \epsilon_k])_C \rightarrow \mathcal{A}(I)$$

が成り立つ。

3. ジョルダン標準形

3.1. ジョルダン標準形の不安定性

ここではジョルダン標準形の不安定性について考察する。

表記 2 以下、ジョルダン標準形を計算するアルゴリズムを *jordan* と表記する。

次の様に行列 A に微小摂動を加えた行列 \tilde{A}_ϵ を考える。

$$(1) \quad \tilde{A}_\epsilon = A + \epsilon F$$

ここで

F = 摂動の方向を表す行列, ϵ = 微小摂動の大きさを表すスカラー

である。この行列 \tilde{A}_ϵ のジョルダン標準形には以下の性質がある ([2] の 5.4 節を参照)。

- 行列 A の固有値に重解がない時には、あらゆる方向 F の微小摂動に対してジョルダン標準形は安定。
- 行列 A の固有値に重解がある時には、ある方向（実際にはほとんどの方向） F の微小摂動に対してジョルダン標準形は不安定。

注意 1 ここでジョルダン標準形の安定性とは、式 (1) で定義した \tilde{A}_ϵ をアルゴリズム *jordan* に入力した場合

$$jordan(\tilde{A}_\epsilon) \rightarrow jordan(A) \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0$$

となることを言う。

不安定となる具体例としては後で示す例 1 がある。

3.2. 単因子によるジョルダン標準形の計算方法と不安定性

本研究ではジョルダン標準形を単因子を使って計算する場合 [2] について考察した。単因子によるジョルダン標準形の計算法は Fig. 1 の様になっている。まずアルゴリズム *smith* で対角要素に単因子の並ぶ行列であるスミス標準形を計算する。次にその単因子を因数分解することでジョルダン標準形を計算する。

表記 3 このスミス標準形を計算するアルゴリズムを以下で *smith* と表記する。

固有値に重解がある時のジョルダン標準形の不安定性は、単因子を計算するアルゴリズム *smith* の不安定性と、単因子を因数分解する時の不安定性に分解される。単因子を因数分解する時の不安定性は単因子の重解を正確に判定出来ない場合に生じる。ここでは、アルゴリズム *smith* の不安定性について説明する。

3.2.1. アルゴリズム *smith* の不安定性

アルゴリズム *smith* の不安定性は次の様になる。微小摂動の結果、同じ固有値の単因子が結合する。ある行列 A についての計算をおこなう場合を考える。次の様な、同じ固有値をもつ単因子が並ぶスミス標準形 $smith(A)$ をもつ行列 A を考える。(対応するジョルダン

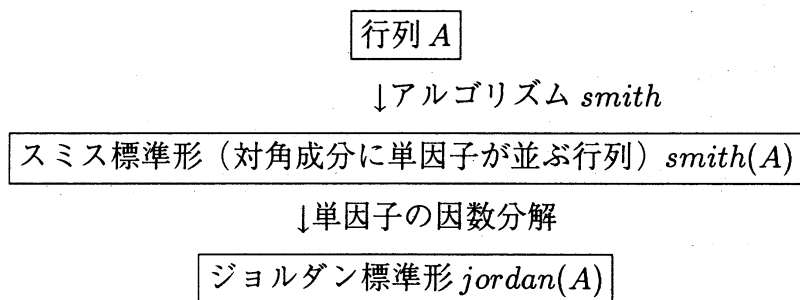


Fig. 1. 単因子によるジョルダン標準形の計算法

標準形も $jordan(A)$ として示す。このジョルダン標準形は同じ固有値をもつ2つのジョルダン細胞からなっている。

$$smith(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x-a)^2 \end{bmatrix}, jordan(A) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

この様なスミス (ジョルダン) 標準形をもつ行列 A に微小摂動を加えた行列 \tilde{A} を考える。摂動によりアルゴリズム $smith$ の計算結果が不安定になる場合、計算されるスミス標準形 $smith(\tilde{A})$ は次のようになる。(対応するジョルダン標準形も $jordan(\tilde{A})$ として示す。)

$$smith(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x-a)^4 \end{bmatrix}, jordan(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

この様に、摂動によって同じ固有値を持つ単因子 (ジョルダン細胞) が結合する。アルゴリズム $smith$ の概略を Fig. 2 に示す。Fig. 2 の具体的内容について説明すると以下のようになる。

- (1) まず、step 1 で元の行列 A から、単位行列 E と変数 x の積を引く。
- (2) k は、現在 k 番目の単因子を計算していることを示している。はじめは step 2 で $k = 1$ として1番目の単因子を計算する。
- (3) 次に step 4 で適当な基本変形を行なう。
- (4) そして step 5 で基本変形の結果 k 番目の単因子が計算できたかを判定する。
- (5) もし、 k 番目の単因子が計算できていることが判明したなら、 k を1つ増やして step 4 からを繰り返す。
- (6) $k > n$ となったら、現在計算中の行列 $[s_{ij}(x)]$ を出力して終了する (step 10)。この行列 $[s_{ij}(x)]$ がスミス標準形となっている。

```

smith(A)
1:  $[s_{ij}(x)] (= S) = A - xE$ 
2:  $k = 1$ ;
3: do
4: 基本変形を行なう;
5: if  $\forall i \geq k \forall j \geq k \{remainder(s_{ij}(x), s_{kk}(x)) = 0\}$ 
6:   then
7:      $\forall i \neq k \ s_{ik} := 0$ ;
8:      $\forall j \neq k \ s_{kj} := 0$ ;
9:      $k := k + 1$ ;
10:   if  $k > n$  then return( $[s_{ij}(x)]$ ) fi
11: fi
12: od

```

基本変形とは以下のことである。

- 行 (列) の交換。
- 行 (列) を定数倍。
- 行 (列) に別な行 (列) の多項式倍を加える。

Fig. 2. アルゴリズム *smith*

アルゴリズム *smith* は不連続点 0 の代数的アルゴリズムである。すなわち、データの演算が基本変形などによる多項式間の加減乗除のみであり、データ上の述語は、step 5 に現れる述語 $\text{remainder}(p, q) = 0$ のみで、0 を不連続点としてもつ。従ってアルゴリズム *smith* は安定化手法によって安定化することが出来る。安定化されたアルゴリズムでは step 5 のゼロ判定が正しく行なわれる。

3.3. ジョルダン標準形の安定化と具体例

次に、計算結果が不安定となるジョルダン標準形と、その計算に安定化理論を適用した具体例を示す。以下の *smith* と $BC(\text{smith})$ などは、すべて HP9000/735 上の Maple V Release 3 で実装し、走らせた。(Maple 組み込みのパッケージ *smith* は、浮動小数を受けつけない。)

例 1 以下の行列 A を考える。そして式 (1) と同様に行列 A に行列 F の方向で微小摂動を加える場合を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

A のジョルダン標準形 $\text{jordan}(A)$ 、スミス標準形 $\text{smith}(A)$ は以下の様にそれぞれ 2 つの同じ固有値をもつジョルダン細胞、単因子からなっている。

$$\text{jordan}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{smith}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+x & 0 \\ 0 & 0 & 1-2x+x^2 \end{bmatrix}$$

加える摂動の大きさは $\epsilon = 0.000001$ とする。

$$\tilde{A} = A + \epsilon F \quad (\epsilon = 0.000001)$$

摂動を加えられた行列 \tilde{A} のスミス標準形 $\text{smith}(\tilde{A})$ は以下の様に 2 つの単因子が結合して不安定な結果となる。

$$\text{smith}(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0000010000 & 0 \\ 0 & 0 & -999997.0 + 3000000.0x - 3000000.0x^2 + 1000000.0x^3 \end{bmatrix}$$

この単因子を因数分解してジョルダン標準形 $\text{jordan}(\tilde{A})$ を計算したのが以下である。

$$\text{jordan}(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} 0.985578 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00721 - 0.0124903\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1.00721 + 0.0124903\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

単因子の因数分解の不安定性のため、3つにジョルダン細胞が分裂する結果となる。以上の計算に安定化理論を適用するため以下の収束列を考える。

$$[I_n, \epsilon_n] = [(\tilde{A} = A + 10^{-n} F), 10^{-n}] \rightarrow A$$

この収束列を安定化されたアルゴリズム $BC(smith)$ に入力すると以下の様になる。 $n = 2$ の場合には

$$BC(smith)([I_2, \epsilon_2]) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0x^3 - 3.0x^2 + 3.0x - 1.0 \end{bmatrix}$$

となり安定な計算結果とならない。 $n = 3$ の場合には

$$BC(smith)([I_3, \epsilon_3]) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0x + 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0x^2 + 2.0x - 1.0 \end{bmatrix}$$

$$BC(jordan)([I_3, \epsilon_3]) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 1 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

となり、安定な計算結果が得られた。 $3 \leq n \leq 10$ の場合についても計算を行なった。この計算で、ゼロ書き換えの回数と解の形は一定であること、正確に計算した解と解の形が一致すること、から $3 \leq n$ で安定となると推定した。

例 2 摂動の方向 F を定めずに、素朴に浮動小数近似した場合の例について次に示す。例 1 と同様に同じ固有値をもつ 2 つのジョルダン細胞、単因子を持つような行列 A を考える。(例 1 と同じくスミス標準形 $smith(A)$ とジョルダン標準形 $jordan(A)$ も示す)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{107}{153} & \frac{202}{153} & \frac{8}{153} & -\frac{61}{153} \\ -\frac{29}{153} & \frac{421}{306} & \frac{25}{153} & -\frac{37}{306} \\ -\frac{71}{306} & \frac{577}{612} & \frac{325}{306} & -\frac{175}{612} \\ -\frac{22}{51} & \frac{19}{51} & \frac{26}{51} & \frac{44}{51} \end{bmatrix}$$

$$smith(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x-1)^2 \end{bmatrix}, \quad jordan(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

この行列 A を浮動小数近似した行列 \tilde{A} を考える。

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.69935 & 1.3203 & 0.052288 & -0.39869 \\ -0.18954 & 1.3758 & 0.16340 & -0.12092 \\ -0.23203 & 0.94281 & 1.0621 & -0.28595 \\ -0.43137 & 0.37255 & 0.50980 & 0.86275 \end{bmatrix}$$

素朴に浮動小数近似しただけで計算を行なった場合には次の様に例1と同様な不安定な計算結果を与える。

$$\begin{aligned} smith(\tilde{A}) &= \begin{bmatrix} 1.3203 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 241.58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.51 - 9.9197x + 14.810x^2 - 9.9001x^3 + 2.5001x^4 \end{bmatrix} \\ jordan(\tilde{A}) &= \begin{bmatrix} 1.0 + 0.0540\sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.999 - 0.0540\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.981 - 0.202\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.980 + 0.202\sqrt{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

浮動小数の桁を増やしても同様の不安定な計算結果となることが分かっている。 $smith(\tilde{A})$ の計算に安定化理論を適用するため、収束列として

$$[I_n, \epsilon_n] = [fl_n(A), err(A)] \rightarrow A$$

を考える。ここで $fl_n(A)$ は、行列 A を浮動小数 n 桁で近似した行列である。 $err(A)$ は、その時の誤差成分を行列要素にもつ行列である。この収束列を安定化されたアルゴリズム $BC(smith)$, $BC(jordan)$ に入力した場合について次に示す。

(1) 浮動小数 2 桁で計算した場合は以下の様に不安定な計算結果となる。

$$BC(smith)([I_2, \epsilon_2]) = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.63x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 浮動小数 3 桁で計算した場合は以下の様に安定な計算結果となった。

$$\begin{aligned} BC(smith)([I_3, \epsilon_3]) &= \begin{bmatrix} 1.32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.495 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.574x^2 - 1.15x + 0.578 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.68x^2 + 5.37x - 2.65 \end{bmatrix} \\ BC(jordan)([I_3, \epsilon_3]) &= \begin{bmatrix} 1.01 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.02 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1.02 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例1と同様に浮動小数 3 桁から 10 桁まで安定化されたアルゴリズムで計算を行なったところ、安定な計算結果を得たので、安定な計算結果であると判定した。

例 3 次に分数の浮動小数近似のみでなく、無理数も含んだ近似例として次の A を考える。

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{-4+20\sqrt{2}}{\sqrt{2}-15} & -\frac{-37+13\sqrt{2}}{\sqrt{2}-15} & -\frac{-17+6\sqrt{2}}{\sqrt{2}-15} & -\frac{-33+13\sqrt{2}}{\sqrt{2}-15} \\ -\frac{7}{\sqrt{2}-15} & -\frac{18\sqrt{2}-96}{\sqrt{2}-15} & \frac{4\sqrt{2}-53}{\sqrt{2}-15} & -\frac{70}{\sqrt{2}-15} \\ -\frac{14}{\sqrt{2}-15} & \frac{3\sqrt{2}+53}{\sqrt{2}-15} & -\frac{12\sqrt{2}+29}{\sqrt{2}-15} & -\frac{7\sqrt{2}+35}{\sqrt{2}-15} \\ (\sqrt{2}-15)^{-1} & -\frac{6\sqrt{2}-83}{\sqrt{2}-15} & \frac{3\sqrt{2}-46}{\sqrt{2}-15} & -\frac{10\sqrt{2}+63}{\sqrt{2}-15} \end{bmatrix}$$

この A のジョルダン標準形とスミス標準形は次に示すように同じ固有値をもつ 2 つのジョルダン細胞、単因子からなりたっている。

$$jordan(A) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad smith(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x-\sqrt{2})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x-\sqrt{2})^2 \end{bmatrix}$$

例 2 と同様に A を素朴に浮動小数近似した行列 \tilde{A} を使った場合の計算例をまず示す。

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1.1345 & -0.33563 & 0.10475 & 0.28861 \\ 1.2287 & -0.37232 & 0.37574 & 1.1504 \\ 1.2136 & -4.4286 & 2.4257 & 3.8328 \\ 0.92570 & 0.16789 & -0.12930 & 0.81216 \end{bmatrix},$$

$$smith(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} -1.3702 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0033 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14.754 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(x) \end{bmatrix}$$

$$(p(x) = -70.942 + 193.85x - 197.07x^2 + 88.265x^3 - 14.674x^4)$$

$$jordan(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} 1.9530 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2130 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4246 + 0.10712\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4246 - 0.10712\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

スミス標準形、ジョルダン標準形、共に不安定な計算結果となる。これを例 2 の場合と同様に安定化する。浮動小数 9 桁までは安定した計算結果が得られないが浮動小数 10 桁以上では以下の様に

安定化した計算結果となる。以下に示すのは浮動小数10桁での計算結果である。

$$BC(smith)([I_{10}, \epsilon_{10}]) = \begin{bmatrix} -1.370198462 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.003162708 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2(x) \end{bmatrix}$$

$$BC(jordan)_{10}(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} 1.414213561 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.414213561 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.420374199 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1.420374199 \end{bmatrix}$$

ここで

$$p_1(x) = 248.2436284x^2 - 702.1390114x + 496.4872558$$

$$p_2(x) = -0.9295639274x^2 + 2.629204453x - 1.859126905$$

である。

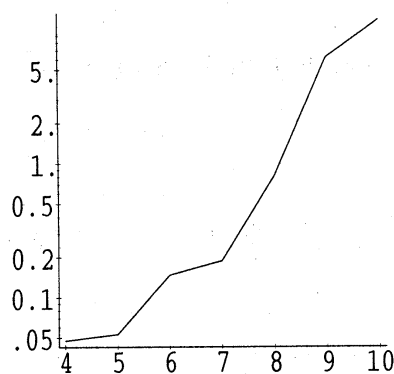
3.4. 計算機実験

安定化の確認とともに、計算時間の実測 (HP9000/735, Maple V Release 3) も行なった。計算時間の、厳密計算との比較を Fig. 3 に示す。ここでは、入力行列の成分をすべて有理数としたため、厳密計算には、Maple 組み込みの *smith* を用いた。実験は、全て同じ固有値もつ2つの単因子からなる行列について行なった。具体的には固有値が全て1の値をとる行列をランダムに生成し、10回計算を行なった場合について計算時間を平均した。大きさが 10×10 の行列の場合、それぞれの平均計算時間は、アルゴリズム *smith* では1361秒、アルゴリズム $BC(smith)$ では116秒となった。Fig. 3において、計算時間は行列の大きさが8を越える所から近似計算の方がより計算時間が少なくなっている。Fig. 3は縦軸が対数目盛なので、計算時間の比は行列の大きさに対して指数的に増加する傾向が観測できた。

4. おわりに

本稿では、安定化手法を浮動小数ジョルダン標準形の計算に適用して、その有用性を示した。この実験により安定化手法を使って安定なジョルダン標準形の近似計算を行なう場合、あまり大きな桁の浮動小数計算でなくとも、安定な計算結果が得られることが確認できた。また、安定化手法を適用した近似計算は、小さな行列では厳密計算より計算時間がかかるが、大きな行列では安定な近似計算の方が計算時間が短いことが予想された。(厳密計算の計算時間)/(安定化された近似計算の計算時間)の比は行列の大きさと共に指数関数的に増大していく傾向が観測された。

今後の課題として、安定に計算できる精度桁の予測の研究が挙げられる。



横軸：行列の大きさ

縦軸：(厳密計算の計算時間)/(安定化された近似計算の計算時間)

Fig. 3. 厳密計算との計算時間の比較

参 考 文 献

- [1] Alefeld, G. and Herzberger, J., *Introduction to Interval Computations*, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press (1983).
- [2] 韓, 伊理, ジョルダン標準形, 東京大学出版会 (1982).
- [3] Shirayanagi, K. and Sweedler, M., A Theory of Stabilizing Algebraic Algorithms, *Technical Report 95-28*, Mathematical Sciences Institute, Cornell University (1995), 92pages.